RED BUILDING TEAM

قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الثامن عشر

5 صفحات

الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 9/10/2014

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

انشر $f = \frac{1}{sh^2 z}$

ننشر وفق ماك_لوران

$$sh^2(z) = \sinh^2 z = \frac{1}{4}\,(e^z - e^{-z})^2 = \frac{1}{4}(e^{2z} - 2 + e^{-2z})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2z} + e^{-2z}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,cosh\,2z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(2z)^{(2n)}}{(2n)!}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \frac{(2z)^6}{6!}\right) = z^2 + \frac{z^4}{3} + \frac{2z^6}{45} + \cdots ..$$

$$f(z) = \frac{1}{\sinh^2 z} = \frac{1}{z^2(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2z^4}{45})} = \frac{1}{z^2}\,[\,1 + \left(-\frac{z^2}{3} - \frac{2z^4}{45} + ..\right) + (\,)^2 + (\,)^3 \,.....]$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \frac{z^2}{15} + \cdots$$

رئيسي — تحليلي

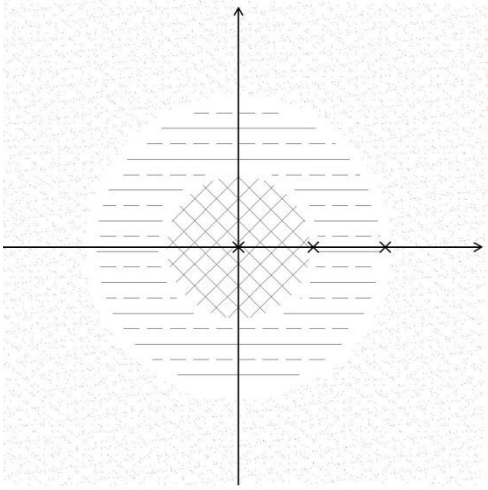
$$res(f,0) = 1$$

مثال: عين جميع حالات نشر لورانت للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$ في حلقة مركزها النقطة الشاذة $z=0$ ثم اوجد هذا النشر لأجل $1 < ||z|| < 0$ مبينا نوع النقطة الشاذة

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{a}{(z-2)} + \frac{b}{(z-1)}\right) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}\right)$$

يمكن نشر التابع في الحلقات $0 < ||z|| < 1 \;\; , \;\; 1 < ||z|| < 2 \;\; , \;\; 2 < ||z|| < \infty$

وذلك لعدم احتواء ي من هذ الحلقات على نقاط شاذة.



$$\frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} \quad ; \quad 1 < \left||z|\right| < 2$$

$$\frac{1}{(z-1)} = -\,\frac{1}{1-z} = -\sum_{0}^{\infty}(z)^{n} \quad ; \quad \left||z|\right| < 1$$

$$f = -\frac{1}{z^{2}}\left(\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z^{n}}{2^{n+1}}\right) + \sum_{0}^{\infty}(z)^{n}\right) \quad ; \quad 0 < \left||z|\right| < 1$$

$$= -\frac{1}{z^{2}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z^{2}}{8}+\frac{z^{3}}{16}\right) + (1+z+z^{2}\ \dots .)\right]$$

$$= -\frac{3}{2z^{2}} - \frac{5}{4z} - \frac{9}{8} - \frac{17}{16}\,z - \frac{33}{32}\,z^{2}$$

رئيسي ← تحليلي

$z = 0$ قطب من المرتبة (٢)

$$res\ (f,0) = -\frac{5}{4}$$

متابعة تطبيقات نظرية الرواسب

٢. التكاملات من الشكل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

حيث f كسر جبري عادي و $f(z)$ عقدي تحليلي في النصف العلوي من ¢ باستثناء عدد محدد من الأقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي $a_1, a_2 \dots \dots a_N$

وإذا كان $\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = 0$ عندئذ:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res(f, a_k)$$

ملاحظة: تلخيص الشروط السابقة:

١. إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجتين على الأقل في $f(z)$
٢. المقام لا ينعدم في f

وإذا كانت بالإضافة للأقطاب السابقة يوجد بعض الاقطاب البسيطة على المحور الحقيقي $b_1, b_2 \dots \dots b_N$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\,(f, a_k) + \pi i \sum_{k=1}^{N} res(f, b_k)$$

مثال: احسب التكامل

$$\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^4+1)}}$$

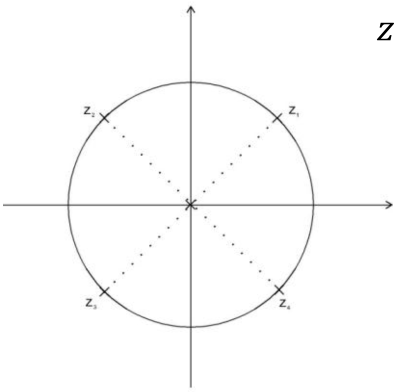
الحل:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^4+1)}$$

كسر جبري عادي درجة بسطه أقل من درجة المقام بخمس درجات

النقاط الشاذة $z = 0$ قطب بسيط لـ $f(z)$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي



$$z^4+1=0 \quad \Rightarrow z^4=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)}$$

$$z_1=e^{\frac{i\pi}{4}} \qquad z_3=e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$z_2=e^{\frac{i3\pi}{4}} \qquad z_4=e^{-\frac{i3\pi}{4}}$$

وهي أقطاب بسيطة يقع z_1 ، z_2 في الجزء العلوي من المستوي العقدي

$$res(f,0)=\frac{g}{h'}=\frac{\left(\frac{1}{z^4+1}\right)}{z'}\Big|_0=1$$

$$res\left(f,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)=\frac{\frac{1}{z}}{(z^4+1)'}\Big|_{e^{\frac{i\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{i\pi}}$$

$$res\left(f,e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)=\frac{\frac{1}{z}}{(z^4+1)'}\Big|_{e^{\frac{i3\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{i3\pi}}$$

$$I=\frac{2\pi i}{4}\left(e^{-\pi i}+e^{-3\pi i}\right)+\pi i(1)=\frac{\pi i}{2}\left(-1+(-1)^3\right)+\pi i=0$$

مثال: احسب التكامل

$$\boldsymbol{I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}}$$

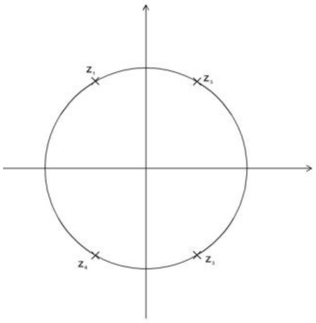
fكسر جبري عادي درجة بسطه أقل من مقامه ب4 درجات

$$z^4+z^2+1=0$$

$$t^2+t+1=0$$

$$\Delta=1-4=-3$$

$$z^2=t=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}\\[2ex]\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)}\end{cases}$$



$$z_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{\frac{i5\pi}{3}}$$

$$z_3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \qquad z_4 = e^{\frac{i4\pi}{3}}$$

أقطاب بسيطة يقع z_3 ، z_1 في القسم العلوي من المستوي العقدي

$$res\left(f, e^{\frac{i2\pi}{3}}\right) = \frac{g}{h'} = \frac{1}{4e^{2\pi i} + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{4 + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

$$res\left(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{1}{4e^{\pi i} + 2e^{\frac{\pi i}{3}}} = \frac{1}{-4 + 2e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4 + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}} + \frac{1}{-4 + 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)$$

بالتحويل الى الشكل المثلثي وتوحيد المقامات نحصل على

$$I = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

ملاحظة:

١. إن I تكامل حقيقي لذلك يجب أن يكون الناتج حقيقي وفي حال وجود i في الناتج يعني أن الجواب خاطئ.

٢. في حال كان التابع فردي أو زوجي

$$I = \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

أنا لم أفشل، بل وجدت ١٠،٠٠٠ طريقة لا يمكن للمصباح العمل بها

توماس أديسون